

**UNITA' 9 – SOMMARIO**

**9. CONDUZIONE TERMICA IN REGIME NON STAZIONARIO**

**9.1. SOLUZIONE DI PROBLEMI TERMICI NON STAZIONARI**

**9.2. ANALISI TERMICA A PARAMETRI CONCENTRATI**

- 9.2.1. Il metodo delle capacità termiche concentrate (integrazione)
- 9.2.2. Conduzione non stazionaria con flusso termico esterno imposto
- 9.2.3. Conduzione non stazionaria con generazione distribuita o concentrata
- 9.2.4. Conduzione non stazionaria: casi applicativi

## 9.1. SOLUZIONE DI PROBLEMI TERMICI NON STAZIONARI

Molti problemi di trasmissione del calore sono di tipo non stazionario. Ciò accade, ad esempio, quando le condizioni al contorno del sistema termico in esame variano istantaneamente o nell'arco di un certo periodo di tempo, innescando così una progressiva variazione della distribuzione di temperatura all'interno del sistema stesso. La distribuzione di temperatura continua a cambiare fintantoché non vengono nuovamente raggiunte condizioni termiche stazionarie.

Problemi termici non stazionari si hanno in una notevole quantità d'ambiti applicativi, concernenti, tra gli altri, i trattamenti termici dei materiali, la sollecitazione termica a fatica, la regimazione degli apparati per refrigerazione e climatizzazione, i transistori di riscaldamento e di raffreddamento dei sistemi meccanici e termofluidodinamici. In linea di principio, lo studio di tali problemi potrebbe essere sempre eseguito risolvendo nella sua forma più completa l'equazione di Fourier della diffusione termica.

Soluzioni analitiche dell'equazione di Fourier sono però disponibili solo per tipologie di problemi ben definiti, solitamente caratterizzati da geometrie e condizioni al contorno semplici e proprietà dei materiali uniformi ed indipendenti dalla temperatura. Quando ciò non si verifica, si può in generale ricorrere a soluzioni di tipo numerico, che possono tuttavia comportare oneri computazionali considerevoli. Oppure, se certe condizioni operative sono verificate, è possibile assumere che la temperatura vari solo nel tempo ma non nello spazio ed eseguire un'analisi a parametri concentrati del comportamento termico del sistema in esame.

## 9.2. ANALISI TERMICA A PARAMETRI CONCENTRATI

Vedi Y.A. Çenghel, *Termodinamica e trasmissione del calore*, 1<sup>a</sup> Edizione o 2<sup>a</sup> Edizione, McGraw-Hill, § 11.1 (1<sup>a</sup> Ed. pagg. 374-380, 2<sup>a</sup> Ed. pagg. 341-346).

### 9.2.1. Il metodo delle capacità termiche concentrate (integrazione)

La classica soluzione ottenuta mediante analisi a parametri concentrati si applica ad un solido con volume  $V$  e superficie esterna di area  $A$ , costituito da un materiale con densità  $\rho$  e calore specifico  $c$ . Il solido si considera immerso istantaneamente in un fluido a temperatura  $T_f$ , costante nel tempo, e si assume che sulle sue superfici lambite dal fluido si abbia un coefficiente di scambio termico convettivo  $h$  uniforme e costante. La temperatura del solido, assunta sempre uniforme ed inizialmente (al tempo  $t=0$ ) uguale ad un valore dato  $T_0$ , varia con legge temporale:

$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t} \equiv T_f + (T_0 - T_f) \cdot e^{-\frac{t}{t_c}}$$

La relazione precedente può anche essere espressa nelle seguenti forme, perfettamente equivalenti:

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t} \equiv e^{-\frac{t}{t_c}}$$

$$\ln \left[ \frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} \right] = -\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t = -\frac{t}{t_c}$$

Il tempo caratteristico  $t_c$  è quello in cui la differenza di temperatura tra solido e fluido scende, in valore assoluto, ad una frazione pari ad  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) del valore iniziale ( $T_0 - T_f$ ). Dopo un tempo pari a circa tre volte e cinque volte  $t_c$ , la differenza di temperatura scende, rispettivamente, al 5% circa e a meno dell' 1% del valore iniziale (vedi Fig. 9.2.1.A).

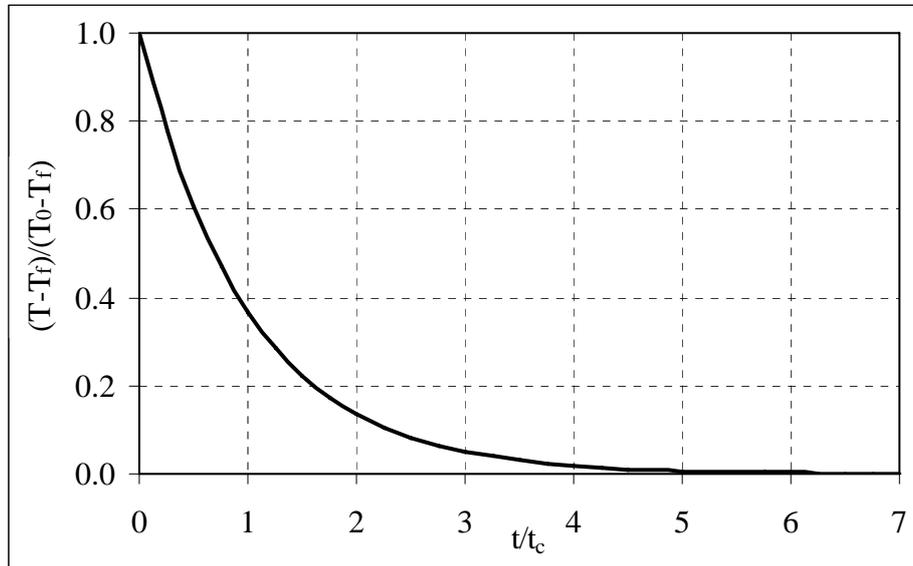


Figura 9.2.1.A. Analisi a parametri concentrati: andamento della differenza di temperatura normalizzata rispetto al tempo adimensionale.

La potenza termica che attraversa la superficie del solido, assunta positiva se entrante e variabile durante il transitorio termico, è descritta dalla relazione:

$$q(t) = -h \cdot A \cdot [T(t) - T_f] = -h \cdot A \cdot (T_0 - T_f) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \equiv -h \cdot A \cdot (T_0 - T_f) \cdot e^{-\frac{t}{t_c}}$$

- Condizione necessaria perché la soluzione a parametri concentrati sia accettabile è che la temperatura nel solido si possa assumere uniforme ad ogni istante. Tale condizione può essere verificata attraverso la stima del numero di Biot:

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} \equiv \frac{h}{\lambda / L_c}$$

La lunghezza  $L_c$  è un parametro geometrico, caratteristico del solido in esame, che è dato dal rapporto tra il volume del solido stesso (escluse le cavità),  $V$ , e l'area della sua superficie di scambio termico,  $A$ :

$$L_c = \frac{V}{A}$$

$Bi$  rappresenta il rapporto tra l'efficienza di trasmissione del calore attraverso la superficie esterna del solido (per convezione e/o irraggiamento) e l'efficienza di trasmissione del calore all'interno del solido (per conduzione). La distribuzione di temperatura nel corpo si può assumere ad ogni istante uniforme se  $Bi \rightarrow 0$ , ovvero se  $Bi \ll 1$ .

Nella pratica, si ritiene ragionevolmente accurata l'analisi a parametri concentrati se:

$$Bi < 0.1$$

L'accuratezza della soluzione a parametri concentrati risente notevolmente dell'accuratezza della stima del coefficiente di scambio termico  $h$ . Tale stima è tipicamente ottenuta, per la componente convettiva del coefficiente, mediante relazioni empiriche che comportano un margine d'incertezza non inferiore al 10÷20%. Inoltre, per la componente radiativa, può esistere una sensibile incertezza circa l'emissività superficiale. Di ciò va tenuto debito conto, eventualmente adottando opportuni margini di sicurezza.

Non va infine dimenticato che la soluzione a parametri concentrati si basa sull'ipotesi di proprietà del materiale pressoché indipendenti dalla temperatura nell'intervallo compreso tra  $T_0$  e  $T_f$ , e di valori costanti ed uniformi della temperatura del fluido  $T_f$  e del coefficiente di scambio termico superficiale  $h$ .

- Una formulazione della soluzione ottenuta mediante analisi a parametri concentrati alternativa a quelle precedentemente viste è la seguente:

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \equiv e^{-Bi \cdot Fo}$$

in cui si fa riferimento a due parametri adimensionali, il già illustrato numero di Biot ed il numero di Fourier, ovvero il tempo adimensionale:

$$Fo = \frac{\lambda \cdot t}{\rho \cdot c \cdot L_c^2} \equiv \frac{\alpha \cdot t}{L_c^2}$$

- Un'ulteriore formulazione della soluzione a parametri concentrati, perfettamente equivalente alle precedenti, è:

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \equiv e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

in cui  $R$  e  $C$  sono, rispettivamente, la resistenza alla trasmissione del calore sulla superficie esterna del solido in esame (in  $K/W$  o  $^{\circ}C/W$ ), e la capacità termica del solido stesso (in  $J/K$  o  $J/^{\circ}C$ ).

$$R = \frac{1}{h \cdot A}$$

$$C = \rho \cdot c \cdot V \equiv m \cdot c$$

Questa formulazione mostra che il problema termico in oggetto trova un analogo elettrico in un circuito RC come quello schematizzato in Fig. 9.2.1.B.

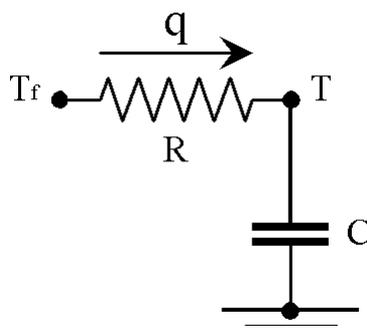


Figura 9.2.1.B. Analisi a parametri concentrati: analogia elettrotermica e circuito RC equivalente.

Il tempo caratteristico  $t_c$  rappresenta, evidentemente, la costante tempo del circuito RC:

$$t_c = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot A} \equiv R \cdot C$$

- Un'analisi a parametri concentrati è anche applicabile al caso di una parete piana con spessore  $L$  ed estensione superficiale  $A$ , che separi due ambienti o due fluidi a diverse temperature, ad es.  $T_1$  e  $T_2$ . L'analisi a parametri concentrati è ammissibile se la resistenza della parete alla trasmissione del calore (per conduzione) è molto minore delle resistenze alla trasmissione del calore (per convezione e/o irraggiamento) sulle superfici lambite dai fluidi.

$$\frac{L}{\lambda \cdot A} \ll \frac{1}{h_1 \cdot A}$$

e

$$\frac{L}{\lambda \cdot A} \ll \frac{1}{h_2 \cdot A}$$

ovvero, riformulando opportunamente le disuguaglianze precedenti,

$$\frac{h_1 \cdot L}{\lambda} = \frac{h_1 \cdot V}{\lambda \cdot A} \equiv Bi_1 \ll 1$$

e

$$\frac{h_2 \cdot L}{\lambda} = \frac{h_2 \cdot V}{\lambda \cdot A} \equiv Bi_2 \ll 1$$

L'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = -h_1 \cdot A \cdot (T - T_{f,1}) - h_2 \cdot A \cdot (T - T_{f,2})$$

ovvero

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{R_1} \cdot (T - T_{f,1}) - \frac{1}{R_2} \cdot (T - T_{f,2})$$

Quest'ultima formulazione dell'equazione di conservazione dell'energia mostra che il problema termico in esame trova un analogo elettrico in un circuito come quello schematizzato in Fig. 9.2.1.C.

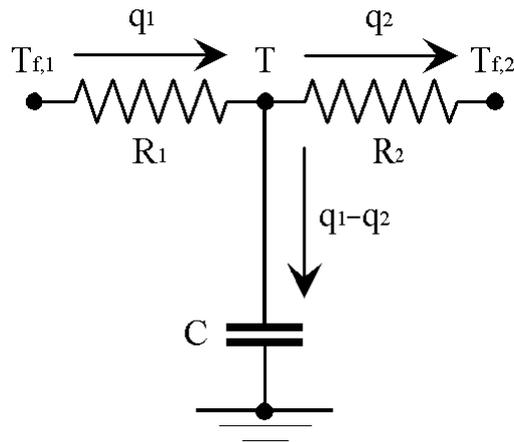


Figura 9.2.1.C. Analisi a parametri concentrati: analogia elettrotermica e circuito RC equivalente.

Per risolvere l'equazione di conservazione dell'energia, è opportuno riformularla come segue:

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left[ T - \left( \frac{T_{f,1}/R_1 + T_{f,2}/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \right) \right] \equiv - \frac{1}{R_e} \cdot (T - T_{f,e})$$

In sostanza, si sono definite una resistenza superficiale equivalente,  $R_e$ , pari al parallelo delle resistenze superficiali  $R_1$  e  $R_2$ , ed una temperatura equivalente dei fluidi,  $T_{f,e}$ , pari alla media delle temperature dei fluidi stessi, pesata sull'inverso delle resistenze termiche superficiali, vale a dire sulle conduttanze superficiali.

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$T_{f,e} = \frac{T_{f,1}/R_1 + T_{f,2}/R_2}{1/R_1 + 1/R_2}$$

La soluzione dell'equazione di conservazione dell'energia è:

$$T(t) = T_{f,e} + (T_0 - T_{f,e}) \cdot e^{-\frac{1}{R_e \cdot C} t}$$

ovvero

$$\frac{T(t) - T_{f,e}}{T_0 - T_{f,e}} = e^{-\frac{1}{R_e \cdot C} t}$$

La temperatura  $T_{f,e}$  altro non è che la temperatura a regime della parete, cioè quella a cui la parete si stabilizza per  $t \rightarrow \infty$ , quando si raggiungono condizioni stazionarie. Va rammentato che la resistenza interna della parete è stata trascurata e, quindi, si è assunto che il gradiente di temperatura attraverso lo spessore della parete sia parimenti trascurabile.

La potenza termica che attraversa le due superfici del solido, assunta positiva se entrante e variabile durante il transitorio termico, è descritta dalle relazioni:

$$q_1(t) = - \frac{1}{R_1} \cdot [T(t) - T_{f,1}] = - \frac{1}{R_1} \cdot (T_0 - T_{f,e}) \cdot e^{-\frac{1}{R_e \cdot C} t}$$

$$q_2(t) = - \frac{1}{R_2} \cdot [T(t) - T_{f,2}] = - \frac{1}{R_2} \cdot (T_0 - T_{f,e}) \cdot e^{-\frac{1}{R_e \cdot C} t}$$

In condizioni stazionarie, la presenza della capacità termica  $C$  della parete diventa ininfluenza e si ricade nel caso di conduzione stazionaria attraverso una parete piana. In tali condizioni si ha quindi, per la conservazione del flusso termico, che  $q_1=q_2$ .

- L'ambito applicativo della soluzione a parametri concentrati si può anche estendere al caso di un solido composito, la cui capacità termica totale  $C$  è data dalla somma delle capacità termiche delle sue  $N$  parti, incapsulato in un involucro, eventualmente multistrato, con capacità termica trascurabile e resistenza termica totale  $R$  data dalla somma delle resistenze conduttive dei vari ( $M$ ) strati e della resistenza convettiva/adduttiva superficiale esterna  $R_s$ .

$$C = \sum_{n=1}^N C_n = \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot c_n \cdot V_n \equiv \sum_{n=1}^N m_n \cdot c_n$$

$$R = \sum_{m=1}^M R_m + R_s = \sum_{m=1}^M \frac{L_m}{\lambda_m \cdot A_m} + \frac{1}{h_s \cdot A_s}$$

Applicata al problema sopra illustrato, la soluzione a parametri concentrati fornisce risultati ragionevolmente accettabili, quantomeno come ordine di grandezza, se:

$$Bi = \frac{h}{\lambda_{\min}/L_c} < 0.1$$

ove  $\lambda_{\min}$  è il minimo valore che la conduttività termica assume nel sistema (cavità piene di gas escluse) e  $h$  rappresenta il cosiddetto coefficiente globale di scambio, valutabile come

$$h = \frac{1}{R_s \cdot A_s}$$

La lunghezza caratteristica  $L_c$  si può calcolare, in favore di sicurezza, considerando tutto il volume  $V$  incluso nella superficie bagnata/esposta di area  $A_s$  (vuoti compresi):

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

Un'ulteriore generalizzazione si può avere se l'involucro multistrato non presenta caratteristiche omogenee. In tal caso, la resistenza termica  $R$  è quella calcolabile mettendo in parallelo i diversi percorsi di trasmissione del calore.

Casi d'analisi possibili tramite l'approccio sopra descritto sono, ad esempio, i transitori termici di un motore a combustione termica (che a freddo è poco efficiente), o di un convertitore catalitico (che a freddo è completamente inefficace). Incapsulando il blocco motore o il convertitore catalitico in opportuni involucri coibenti, che saranno tuttavia attraversati da supporti o alberi di trasmissione (albero motore, ausiliari, ecc.) in materiale metallico molto conduttivo e dovranno comunque lasciare scoperte parti soggette a temperature molto elevate (collettori di scarico, turbocompressori, ecc.), si può far sì che il loro tempo di raffreddamento sia molto più lungo del tempo di stazionamento tipico del veicolo, garantendo così un avviamento a temperatura più elevata del valore ambiente e, quindi, più rapidi transitori di riscaldamento. Mediante analisi a parametri concentrati è possibile individuare le caratteristiche che l'involucro coibente deve possedere, in termini di spessore e conduttività termica del materiale, al fine di ottenere le prestazioni desiderate.

### 9.2.2. Conduzione non stazionaria con flusso termico esterno imposto

Nel caso che sulla superficie di un solido immerso in un fluido abbia luogo uno scambio termico riconducibile ad una condizione al contorno di tipo misto, in cui alla

convezione/adduzione in aria si sovrappone un flusso termico imposto (ad esempio, per irraggiamento solare oppure da sorgenti radianti ad alta temperatura), l'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = q'' \cdot A - h \cdot A \cdot (T - T_f)$$

La relazione può essere facilmente ricondotta al caso di scambio termico convettivo/adduttivo semplice attribuendo al fluido/ambiente una temperatura equivalente  $T_{f,q}$  (fittizia), tale che:

$$T_{f,q} = T_f + \frac{q'' \cdot A}{h \cdot A} \equiv T_f + \frac{q''}{h}$$

ovvero

$$q'' \cdot A = h \cdot A \cdot (T_{f,q} - T_f) \equiv -h \cdot A \cdot (T_f - T_{f,q})$$

Introducendo la relazione precedente nell'equazione di conservazione dell'energia, si ha:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} &= -h \cdot A \cdot (T_f - T_{f,q}) - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \\ &= -h \cdot A \cdot (T - T_{f,q}) \equiv -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{q''}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

Si arriva così ad ottenere la forma tipica della soluzione a parametri concentrati:

$$T(t) = T_{f,q} + (T_0 - T_{f,q}) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} = T_{f,q} + (T_0 - T_{f,q}) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

Qualora l'irraggiamento diretto riguardi solo una porzione della superficie,  $A_{irr} < A$ , l'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} &= q'' \cdot A_{irr} - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \\ &= -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{q'' \cdot A_{irr}}{h \cdot A} \right) \right] \equiv -h \cdot A \cdot (T - T_{f,q}) \end{aligned}$$

con

$$T_{f,q} = T_f + \frac{q'' \cdot A_{irr}}{h \cdot A}$$

### 9.2.3. Conduzione non stazionaria con generazione distribuita o concentrata

Se in un solido immerso in un fluido ha luogo una "generazione" distribuita d'energia termica, l'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = q_g''' \cdot V - h \cdot A \cdot (T - T_f)$$

La relazione può essere facilmente ricondotta al caso d'assenza di generazione attribuendo al fluido una temperatura equivalente  $T_{f,g}$  (fittizia), tale che:

$$T_{f,g} = T_f + \frac{q_g''' \cdot V}{h \cdot A}$$

ovvero

$$q_g''' \cdot V = h \cdot A \cdot (T_{f,g} - T_f) \equiv -h \cdot A \cdot (T_f - T_{f,g})$$

Introducendo la relazione precedente nell'equazione di conservazione dell'energia, si ha:

$$\begin{aligned}\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} &= -h \cdot A \cdot (T_f - T_{f,g}) - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \\ &= -h \cdot A \cdot (T - T_{f,g}) \equiv -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{q_g''' \cdot V}{h \cdot A} \right) \right]\end{aligned}$$

In definitiva, si arriva ad ottenere un'altra volta la forma tipica della soluzione a parametri concentrati:

$$T(t) = T_{f,g} + (T_0 - T_{f,g}) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \equiv T_{f,g} + (T_0 - T_{f,g}) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

Qualora la generazione distribuita riguardi solo una porzione del volume,  $V_g < V$ , l'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\begin{aligned}\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} &= q_g''' \cdot V_g - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \\ &= -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{q_g''' \cdot V_g}{h \cdot A} \right) \right] \equiv -h \cdot A \cdot (T - T_{f,g})\end{aligned}$$

con

$$T_{f,g} = T_f + \frac{q_g''' \cdot V_g}{h \cdot A}$$

Infine, ove si abbia una "generazione" concentrata di energia termica  $q_g$ , ovvero genericamente associata al volume  $V$ , richiamando l'ipotesi di fondo che il solido sia capace di distribuire il calore al proprio interno con efficienza tale da poter assumere la sua temperatura uniforme, l'equazione di conservazione dell'energia assume la forma:

$$\begin{aligned}\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} &= q_g - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \\ &= -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{q_g}{h \cdot A} \right) \right] \equiv -h \cdot A \cdot (T - T_{f,g})\end{aligned}$$

con

$$T_{f,g} = T_f + \frac{q_g}{h \cdot A}$$

#### 9.2.4. Conduzione non stazionaria: casi applicativi

È possibile analizzare a parametri concentrati una notevole quantità di problemi d'interesse pratico. Alcuni casi particolarmente significativi sono illustrati nel seguito.

##### – Trattamento termico di componenti metallici.

I componenti meccanici ed i semilavorati metallici sono spesso sottoposti a trattamenti termici come, ad esempio, la tempra, che prevedono il loro riscaldamento e mantenimento ad una certa temperatura e, quindi, un brusco raffreddamento, da completarsi entro un brevissimo periodo temporale  $\Delta t$ . Il raffreddamento è tipicamente ottenuto tramite immersione in una vasca di olio o altro fluido a temperatura stabilizzata (quindi per convezione semplice o con ebollizione). Il valore minimo che il coefficiente di scambio

termico superficiale deve presentare, eventualmente controllabile tramite opportuna agitazione del fluido, può essere stimato mediante analisi a parametri concentrati.

Poiché il coefficiente di convezione è incognito, non è possibile procedere ad una valutazione preliminare del numero di Biot. Tuttavia, si può ipotizzare ammissibile lo studio a parametri concentrati e verificare a posteriori la validità di tale ipotesi.

Il coefficiente di convezione è incluso nel tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , che si può stimare esplicitandolo nella relazione:

$$T = T_f + (T_0 - T_f) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Avendo fissato le temperature  $T_0$  e  $T_r$  all'inizio e alla fine del brusco raffreddamento (con  $T_0 > T_r > T_f$ ), è possibile determinare il tempo caratteristico  $t_c$  da ottenere sulla base del periodo di tempo  $\Delta t$  dall'immersione, assunta istantanea, entro cui il raffreddamento deve verificarsi:

$$t_c = - \frac{\Delta t}{\ln \left( \frac{T_r - T_f}{T_0 - T_f} \right)}$$

Per determinare il coefficiente di convezione a partire da  $t_c$ , è poi necessario calcolare il volume e la superficie del semilavorato e, da questi, la lunghezza caratteristica del problema:

$$L_c = \frac{V}{A}$$

Sulla base delle proprietà geometriche (volume, area superficiale, lunghezza caratteristica) e di quelle termofisiche del materiale (calore specifico, densità), si ricava infine che il valore minimo richiesto del coefficiente di convezione vale:

$$h = \frac{\rho \cdot c \cdot L_c}{t_c}$$

Il valore effettivamente richiesto nei trattamenti termici industriali, seppur elevato, può essere conseguito con relativa facilità per immersione in un liquido mantenuto in agitazione.

In conclusione, non va dimenticata la verifica dell'ammissibilità della metodologia di analisi:

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} < 0.1$$

#### – Inerzia termica e tempo di risposta dei sensori di temperatura.

I sensori termici in realtà non misurano la temperatura della sostanza (fluida o solida) in cui sono immersi, ma la propria temperatura interna e, più precisamente, la temperatura del loro elemento sensibile (ad esempio, in una termocoppia rame-costantana, la temperatura della giunzione termoelettrica tra filo di rame e filo di costantana). Non sempre tale temperatura coincide con quella che si vuole misurare, specialmente se l'inerzia termica del sensore è troppo grande e, quindi, è troppo lungo il tempo in cui la temperatura del sensore stesso varia in conseguenza di una variazione della temperatura di ciò che lo circonda. Pertanto, ad un sensore termico che deve attivare una qualche procedura di emergenza in conseguenza di un surriscaldamento, un incendio o una fuga di vapore è richiesta una risposta molto rapida piuttosto che un'elevata precisione.

Il tempo di risposta di un sensore per misure di temperatura in un fluido è il tempo che intercorre tra l'immersione del sensore nella corrente di fluido monitorata e la riduzione della differenza di temperatura tra sensore e fluido ad una percentuale assegnata della differenza iniziale. Ad esempio, il tempo di risposta  $t_{95}$  o quello  $t_{99}$  è il tempo dopo il quale la differenza di temperatura tra sensore e fluido si è ridotta del 95% o del 99% rispetto alla differenza

iniziale (ovvero il tempo in cui la differenza di temperatura tra sensore e fluido si è ridotta al 5% o all' 1% della differenza iniziale).

$$\frac{T(t_{95}) - T_f}{T_0 - T_f} = 1 - 0.95 = 5\%$$

$$\frac{T(t_{99}) - T_f}{T_0 - T_f} = 1 - 0.99 = 1\%$$

Il tempo di risposta è di fatto proporzionale al tempo caratteristico  $t_c$  del sensore o, più precisamente, del suo elementi sensibile alle variazioni di temperatura.

$$t_{risposta} \propto t_c = \frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot A}$$

Si è precedentemente rilevato (vedi § 9.2.1) che la differenza di temperatura si riduce del 95% o sotto il 99% dopo un tempo pari a circa tre volte o a poco meno di cinque volte  $t_c$ . Dalla relazione ultima scritta si ricava peraltro che  $t_{risposta}$  non dipende dalle temperature in gioco, ma solo dalle caratteristiche geometriche e termofisiche del sensore e dal coefficiente di convezione superficiale (sul quale, non va dimenticato, esiste spesso una notevole incertezza).

La stima di  $t_{risposta}$  ( $t_{99}$ ,  $t_{95}$  o altro) può essere operata mediante analisi a parametri concentrati. A tal scopo, occorre verificare preliminarmente, attraverso la valutazione del numero di Biot, se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante un transitorio termico. Per valutare il numero di Biot è necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema. Ad esempio, per un sensore caratterizzato da elemento sensibile sferico e da trascurabili capacità termica ed area superficiale dei fili collegati all'elemento sensibile (vedi Fig. 9.2.4.A), il tempo caratteristico vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{(4/3) \cdot \pi \cdot (D/2)^3}{4 \cdot \pi \cdot (D/2)^2} = \frac{D}{6}$$



Figura 9.2.4.A. Sensore sferico e cilindrico.

Per un sensore caratterizzato da elemento sensibile cilindrico (con  $L \gg D$ ), il tempo caratteristico vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\pi \cdot (D/2)^2 \cdot L}{\pi \cdot D \cdot L + 2 \cdot \pi \cdot (D/2)^2} \approx \frac{\pi \cdot (D/2)^2 \cdot L}{\pi \cdot D \cdot L} = \frac{D}{4}$$

L'ultima approssimazione è accettabile se l'area delle superfici circolari d'estremità è piccola rispetto all'area della superficie cilindrica laterale, ovvero se  $L \gg D$ .

Una volta stimati il tempo caratteristico  $t_c$  e, mediante le opportune relazioni empiriche o per via sperimentale, il coefficiente di scambio termico  $h$ , è possibile verificare che valga:

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} \ll 1$$

Se la condizione è rispettata, si può procedere alla valutazione del tempo caratteristico  $t_c$  e del tempo di risposta desiderato, ad esempio  $t_{99}$ :

$$t_{99} = -t_c \cdot \ln \left[ \frac{T(t_{99}) - T_f}{T_0 - T_f} \right] = -\frac{\rho \cdot c \cdot L_c}{h} \cdot \ln(1 - 0.99)$$

È evidente che, per contenere il tempo caratteristico e, quindi, il tempo di risposta, è necessario adottare sensori molto compatti, cioè con  $L_c$  molto piccolo, nonché con elemento sensibile in materiale con ridotta capacità termica volumica  $\rho \cdot c$ .

Poiché il tempo di risposta è inversamente proporzionale al coefficiente di scambio termico  $h$ , che a sua volta dipende dal particolare processo monitorato, il valore indicato dai produttori di sensori termici è solitamente riferito a situazioni operative ben precise (ad esempio di immersione in aria ferma oppure in acqua ferma). Il valore indicato costituisce evidentemente un limite superiore del tempo di risposta effettivo se, come spesso accade, nell'uso si riscontrano coefficienti di scambio termico superiori a quelli di riferimento, ad esempio, nei casi in cui vengono monitorati fluidi in moto o in agitazione. D'altra parte, se si vanno a monitorare fluidi molto più viscosi di quello di riferimento, il tempo di risposta effettivamente riscontrato può essere molto più lungo di quello nominale a causa di un basso coefficiente di convezione.

#### – Movimentazione di cibi e generi deperibili.

Durante i trasferimenti di generi congelati o surgelati, ad esempio da un magazzino refrigerato ad un camion frigorifero o viceversa, i generi suddetti possono essere temporaneamente depositati in ambienti a temperatura non compatibile con la loro conservazione. È tuttavia improbabile che si deteriorino se il periodo di stazionamento è corto abbastanza da far sì che non venga raggiunta, in nessun punto, la temperatura di scongelamento. Il massimo periodo di stazionamento ammissibile può essere stimato mediante analisi a parametri concentrati.

Si consideri una confezione di generi congelati o surgelati, che devono essere normamente mantenuti ad una temperatura di conservazione  $T_c$  molto inferiore a  $0^\circ\text{C}$ . Se si tratta di generi alimentari, di solito costituiti essenzialmente da acqua, le loro proprietà termofisiche possono essere assimilate a quelle del ghiaccio – a temperatura  $-20^\circ\text{C}$ , l'acqua ghiacciata presenta  $\lambda \cong 2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $c \cong 2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\rho \cong 920 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Siano tali generi caratterizzati da massa  $m$ , volume  $V_i$  e superficie esterna  $A_i$  coincidente con la superficie interna dell'involucro in materiale isolante che li protegge, il quale presenta capacità termica trascurabile (in favore di sicurezza) e resistenza termica totale  $R$ ; se vengono depositati in un ambiente a temperatura  $T_a > 0^\circ\text{C}$  (e, quindi,  $> T_c$ ), la variazione della loro temperatura nel tempo è regolata dalla relazione:

$$T(t) = T_a + (T_c - T_a) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

Assumendo una composizione omogenea, la capacità termica  $C$  vale:

$$C = m \cdot c = \rho \cdot V_i \cdot c$$

Trascurando, in favore di sicurezza, la resistenza di contatto tra generi alimentari e involucro, la resistenza termica  $R$  vale:

$$R = \frac{s}{\lambda \cdot A_e} + \frac{1}{h \cdot A_e} \approx \frac{s}{\lambda \cdot A_e}$$

Nella relazione precedentem il termine  $s$  rappresenta lo spessore di parete dell'involucro isolante. L'ultima approssimazione è ottenuta trascurando la resistenza adduttiva esterna. Infatti, sul coefficiente di scambio termico superficiale esiste una certa incertezza, ma si può al riguardo operare in favore di sicurezza e considerare la sola protezione termica data dal materiale isolante.

Si noti che la superficie esterna dell'involucro,  $A_e$ , a cui si fa riferimento nella stima sia della resistenza adduttiva, sia (per compensare gli effetti di bordo) della resistenza conduttiva, è in generale diversa dalla superficie  $A_i$  considerata nel calcolo di  $L_c$ , che è quella dei soli generi alimentari contenuti nell'involucro.

La temperatura esterna  $T_a$  può anche essere incrementata in presenza di un flusso termico  $q''$  per irraggiamento diretto (ad es. solare) che investa una porzione di area  $A_{e,irr}$  della superficie esterna  $A_e$  del contenitore:

$$T_a \rightarrow T_a + \frac{q'' \cdot A_{e,irr}}{h \cdot A_e}$$

Il tempo di massimo stazionamento in un ambiente a temperatura  $T_a$  è quello in cui la temperatura dei generi alimentari, assunta uniforme ad ogni istante, passa dal valore iniziale  $T_c$  (la temperatura di conservazione) al valore di scongelamento  $T_d$  (indicativamente pari a  $0^\circ\text{C}$ , ma spesso inferiore):

$$t_{\max} = -\ln\left(\frac{T_d - T_a}{T_c - T_a}\right) \cdot R \cdot C = -\ln\left(\frac{T_d - T_a}{T_c - T_a}\right) \cdot (\rho \cdot c \cdot V_i) \cdot \left(\frac{s}{\lambda \cdot A_e}\right)$$

In pratica, il tempo può essere modulato intervenendo sullo spessore di isolante, anche se non va dimenticato che il suo incremento è in parte vanificato dal conseguente incremento di  $A_e$ .

Perché la stima sia accettabile, deve valere che:

$$Bi = \frac{1/(R \cdot A_e)}{\lambda/L_c} = \frac{L_c}{\lambda \cdot R \cdot A_e} < 0.1$$

La relazione di stima di  $t_{\max}$  è generalmente verificata per confezioni caratterizzate da valori di  $L_c$  relativamente ridotti e spessori consistenti dell'involucro in materiale isolante, non inferiori a qualche centimetro. Ovviamente, una volta raggiunto il punto di scongelamento, la relazione analitica individuata non è più valida, poiché non tiene conto del calore latente di liquefazione della sostanza originariamente congelata.

#### – Attuatori a memoria di forma.

Un oggetto realizzato in una lega metallica a memoria di forma (SMA – *shape memory alloy*) è in grado di memorizzare la sua forma originaria e, dopo essere stato sottoposto a deformazioni anche molto consistenti, di ricuperarla attraverso un semplice processo di riscaldamento o raffreddamento (effetto di memoria di forma). Ciò è causato da transizioni tra diverse fasi solide, tipicamente martensite (fase a bassa temperatura) e austenite (fase ad alta temperatura), e consente, tra le varie applicazioni, la realizzazione di attuatori meccanici caratterizzati da elevatissima densità di potenza (potenza meccanica rapportata all'unità di massa o di volume), spesso molto più alta di quella ottenibile tramite attuatori idraulici.

Il più semplice attuatore basato su SMA che si può concepire è una barra ad elevato allungamento che, riscaldata, si contrae (fino al 6-8%). Contraendosi, la barra è in grado di esercitare una forza di trazione (verso l'alto in Fig. 9.2.4.B). Lasciata raffreddare, riacquista il suo allungamento originario previa applicazione di una forza di ritorno, generalmente inferiore a quella di trazione. Complessivamente, se sottoposta ad un ciclo termico di riscaldamento e raffreddamento, la barra è in grado di attuare un ciclo meccanico di

contrazione ed espansione, erogando nell'arco del ciclo un lavoro meccanico netto positivo. L'allungamento dell'attuatore, intrinsecamente molto limitato, può essere incrementato conferendogli la forma di una molla, che si contrae se riscaldata e torna ad allungarsi dopo essersi raffreddata.

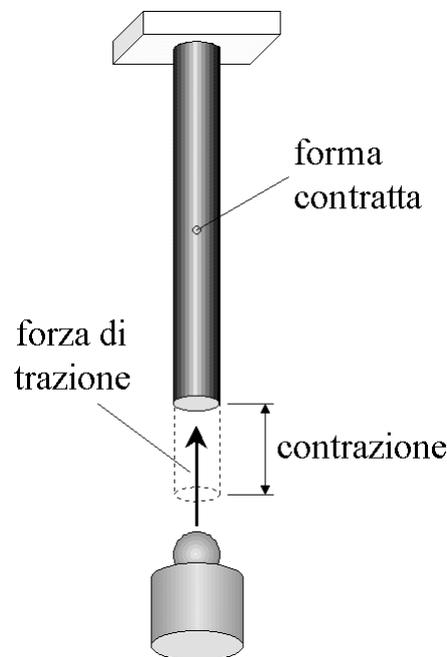


Figura 9.2.4.B. Attuatore a memoria di forma.

I principali pregi degli attuatori a memoria di forma sono la semplicità e la densità di potenza. I principali difetti risiedono nella complessità di realizzazione e d'impiego (le proprietà dei materiali risentono moltissimo della composizione, della dimensione dei grani, dei trattamenti termici, delle modalità di sollecitazione) e nella bassa frequenza di funzionamento. Quest'ultima è una diretta conseguenza delle modalità con cui si svolgono i processi termici associati agli effetti di memoria di forma. Tali processi si possono studiare mediante analisi a parametri concentrati.

Il riscaldamento di un attuatore a memoria di forma è generalmente ottenuto per effetto Joule, facendo cioè passare attraverso l'attuatore una corrente elettrica continua. Nel caso di un attuatore a forma di barra o di molla, realizzato in una SMA con conduttività elettrica  $\sigma$  e caratterizzato da estensione longitudinale  $L$  e sezione di passaggio della corrente  $S$ , la potenza termica riscaldamente ottenibile è proporzionale al quadrato della corrente:

$$q_g = R_e \cdot I^2 = \frac{L}{\sigma \cdot S} \cdot I^2$$

Nella relazione,  $R_e$  [ $\Omega$ ] è la resistenza elettrica dell'attuatore. Riferendo la potenza termica prodotta all'unità di volume, si ottiene:

$$q_g''' = \frac{q_g}{V} = \frac{R_e \cdot I^2}{S \cdot L} = \frac{1}{\sigma \cdot S^2} \cdot I^2$$

È evidente che, a parità di corrente e di area della sezione trasversale, la generazione di calore è tanto maggiore quanto più bassa è la conduttività elettrica  $\sigma$ , ovvero quanto più elevata è la resistività elettrica  $\rho_e (=1/\sigma)$ . Ciò fa sì che, tra le varie SMA, siano particolarmente utilizzate quelle a base di nichel-titanio (Ni-Ti), che presentano  $\rho_e \approx 0.5 \div 1.1 \cdot 10^6 \Omega \cdot m$ .

L'equazione di conservazione dell'energia nella fase di riscaldamento può essere formulata come segue:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = q_g''' \cdot V - h \cdot A \cdot (T - T_f) = \frac{L}{\sigma \cdot S} \cdot I^2 - h \cdot A \cdot (T - T_f)$$

Il coefficiente di scambio termico  $h$  presenta valori relativamente ridotti poiché i processi di trasmissione del calore attraverso la superficie laterale di un attuatore, di area  $A$ , di solito avvengono per convezione naturale in aria e/o irraggiamento termico (in attuatori utilizzati nel vuoto, ad esempio nello spazio fuori dell'atmosfera, si ha soltanto irraggiamento termico). Inoltre, le leghe (metalliche) utilizzate hanno conduttività termica relativamente alta –  $\lambda \approx 8.6 \div 18 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  per leghe Ni-Ti. A ciò si aggiunga che un attuatore a memoria di forma presenta tipicamente elevato allungamento  $e$ , quindi, ridotto valore della lunghezza caratteristica  $L_c$  (non superiore ad alcuni millimetri). Ne consegue che il numero di Biot è molto piccolo e, quindi, l'analisi a parametri concentrati quasi sempre possibile.

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} \ll 1$$

Come precedentemente illustrato (vedi § 9.2.2), l'equazione di conservazione dell'energia riferita alla fase di riscaldamento può essere facilmente ricondotta al caso d'assenza di generazione attribuendo al fluido o all'ambiente esterno, in cui si ha una temperatura  $T_f$ , una temperatura equivalente  $T_g$  (fittizia), tale che:

$$q_g''' \cdot V = h \cdot A \cdot (T_g - T_f) = -h \cdot A \cdot (T_f - T_g)$$

ovvero

$$T_g = T_f + \frac{q_g''' \cdot V}{h \cdot A} = T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S}$$

Introducendo la relazione precedente nell'equazione di conservazione dell'energia, si ha:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = -h \cdot A \cdot (T - T_g) = -h \cdot A \cdot \left[ T - \left( T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S} \right) \right]$$

In definitiva, si arriva ad ottenere la forma tipica della soluzione a parametri concentrati:

$$\begin{aligned} T(t) &= T_g + (T_0 - T_g) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \equiv \\ &\equiv \left( T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S} \right) + \left[ T_0 - \left( T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S} \right) \right] \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{\rho \cdot c \cdot V} t} \end{aligned}$$

Essendo il valore  $h$  solitamente ridotto e la potenza dissipata elevata ( $T_g \gg T_0$ ), lo scambio termico superficiale comincia ad avere un impatto rilevante solo nell'ultima fase del transitorio di riscaldamento, che nelle fasi iniziali presenta progressione pressoché lineare:

$$T(t) \approx T_0 + \frac{q_g}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot t \equiv T_0 + \frac{I^2}{\rho \cdot c \cdot \sigma \cdot S^2} \cdot t$$

La transizione di fase avviene in all'interno di un certo intervallo di temperatura, dipendente dalla composizione del materiale. Il tempo  $\Delta t_{on}$  necessario a raggiungere una temperatura prefissata  $T_{on}$ , situata sopra l'estremo superiore dell'intervallo di transizione e, quindi, tale da poter ritenere completata la transizione di fase, può essere stimato, sulla base della massima corrente  $I$  erogabile, riformulando opportunamente la soluzione a parametri concentrati:

$$\Delta t_{on} = -\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot A} \cdot \ln\left(\frac{T_{on} - T_g}{T_0 - T_g}\right) \equiv -\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot A} \cdot \ln\left[\frac{T_{on} - \left(T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S}\right)}{T_0 - \left(T_f + \frac{L \cdot I^2}{h \cdot A \cdot \sigma \cdot S}\right)}\right]$$

Una volta raggiunta, la temperatura  $T_{on}$  può essere mantenuta continuamente, per tutto l'intervallo di tempo desiderato  $\Delta t_m$ , fornendo all'attuatore una corrente  $I_m$  tale che la potenza termica dissipata per effetto Joule sia pari a quella persa attraverso le superfici esterne per convezione e/o irraggiamento. La corrente  $I_m$  da applicare può essere stimata tramite la relazione:

$$q_m = R_e \cdot I_m^2 = \frac{L}{\sigma \cdot S} \cdot I_m^2 = h \cdot A \cdot (T_{on} - T_f)$$

Se si annulla la corrente erogata, l'attuatore inizia a raffreddarsi. L'equazione di conservazione dell'energia nella fase di raffreddamento può essere formulata come segue:

$$\rho \cdot c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = -h \cdot A \cdot (T - T_f)$$

Come già detto, la transizione di fase avviene in un certo intervallo di temperatura. Il tempo  $\Delta t_{off}$  necessario a raggiungere una temperatura prefissata  $T_{off}$ , situata sotto l'estremo inferiore dell'intervallo di transizione e, quindi, tale da poter ritenere completata la transizione inversa, può essere anch'esso stimato formulando opportunamente la soluzione a parametri concentrati (in cui  $T_0 = T_{on}$ ):

$$\Delta t_{off} = -t_c \cdot \ln\left(\frac{T_{off} - T_f}{T_{on} - T_f}\right) \equiv -\frac{\rho \cdot c \cdot V}{h \cdot A} \cdot \ln\left(\frac{T_{off} - T_f}{T_{on} - T_f}\right)$$

Se il funzionamento dell'attuatore è ciclico,  $T_{off}$  coincide con la temperatura all'inizio del riscaldamento. Trascurando le inerzie dinamiche, il periodo di ciclo è in definitiva pari a:

$$\Delta t_{ciclo} = \Delta t_{on} + \Delta t_m + \Delta t_{off}$$

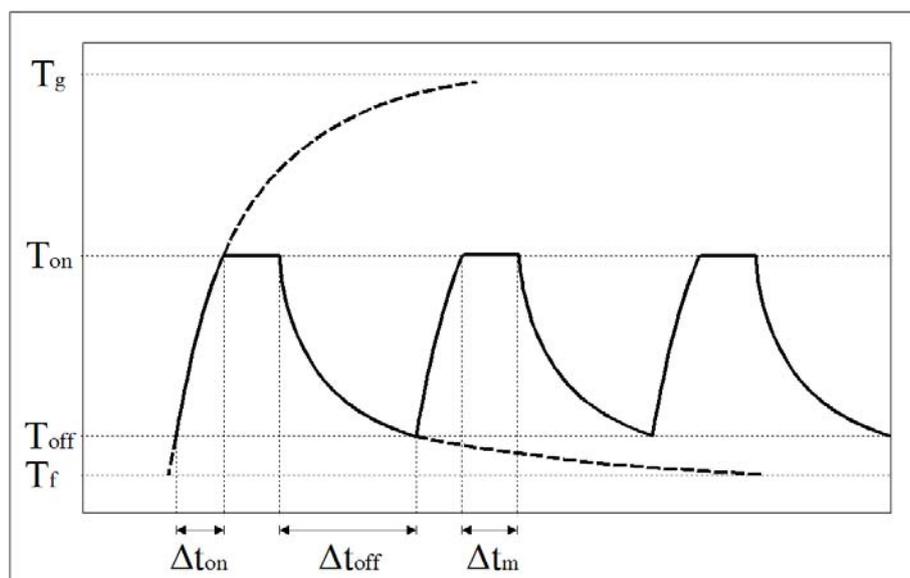


Figura 9.2.4.C. Ciclo termico di un attuatore a memoria di forma.

Se il tempo di riscaldamento  $\Delta t_{on}$  è in teoria modulabile a piacere agendo sulla corrente  $I$  (nei limiti concessi dall'isolamento elettrico e dall'apparato d'alimentazione), ed il tempo di mantenimento  $\Delta t_m$  è controllabile secondo necessità (al limite,  $\Delta t_m=0$ ), il tempo di raffreddamento  $\Delta t_{off}$  è condizionato dal valore del coefficiente di scambio termico superficiale  $h$ , il quale in convezione naturale o nel vuoto è sempre molto piccolo. D'altra parte, introdurre dispositivi di ventilazione o un sistema di raffreddamento a liquido vanificherebbe molti dei vantaggi di un attuatore a memoria di forma. Ne consegue che, con le proprietà tipiche delle SMA ( $\rho=6400\div 6500 \text{ kg/m}^3$  e  $c=450\div 620 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ) per una lega Ni-Ti, i periodi minimi oggi attuabili sono pari a circa un secondo (corrispondenti a frequenze di attuazione massime dell'ordine di 1 Hz).

Poiché l'attuatore si contrae e si espande, il suo sviluppo longitudinale  $L$  e la sua superficie esposta  $A$  non sono costanti nell'arco di un ciclo, ma subiscono una contrazione relativa rispetto al valore a freddo compresa tra lo 0.5% e l'8%. Al fine di ridurre le sollecitazioni a fatica ed aumentare la vita utile dell'attuatore, la contrazione è solitamente mantenuta nella parte inferiore dell'intervallo sopra indicato ed è quindi trascurabile, quantomeno in prima approssimazione.

Va infine tenuto presente che è associato alla transizione di fase, sia in un senso che nell'altro, un calore latente di transizione di fase (solido-solido),  $r$  (ad esempio,  $r=19\div 32 \text{ kJ/kg}$  per le leghe Ni-Ti). Tale calore latente deve essere fornito al materiale in aggiunta a quello sensibile durante la fase di riscaldamento, nonché sottratto durante la fase di raffreddamento. Per tenerne sommariamente conto, nelle relazioni si può utilizzare, invece del calore specifico proprio del materiale, un calore specifico equivalente  $c'$ , definito come segue:

$$c' = c + r/\Delta T$$

ove

$$\Delta T = T_{on} - T_{off}$$